Algunas consideraciones matemáticas sobre la función de costos y las demandas condicionadas de factores

Carlos Swoboda

Introducción

El objetivo de este artículo es examinar las principales características de la técnica matemática que permite obtener la función de costo total de una empresa cuyo propietario o administrador tiene como meta lograr un volumen de producción tal que maximice el beneficio. Vale recordar que la minimización de costos es una condición necesaria del problema de la maximización del beneficio. Existen muchas formas de combinar los factores de la producción pero una sola de ellas es el foco de atención del trabajo: la combinación de costo mínimo para producir una cantidad determinada de un bien específico. El problema de una firma que busca maximizar beneficios puede presentarse en términos de dos secuencias: en la primera etapa la administración establece para cada nivel de producción la combinación de factores que minimice el costo, mientras que en el segundo tramo se determina la cantidad física que hace máxima la ganancia. Por ello su tratamiento en forma independiente es totalmente valido.

Junto con lo anterior en el artículo se establecen las propiedades más importantes de la función de costos y se calculan las funciones de costo marginal y costo medio. También se derivan las demandas de factores de la producción y se señalan sus principales características. Esto permite ver como cambia la solución del problema de optimización cuando se produce una pequeña modificación en la información que proviene del mercado.

A los efectos de hacer más clara la comprensión de los temas mencionados el análisis se divide en dos grandes áreas: en la primera se toma como punto de partida una función de producción general mientras que en la segunda se analiza la estructura interna de las funciones de costos que se derivan de dos funciones de producción específicas que en esta oportunidad son la función Cobb-Douglas y la función de Leontief.

Al final del trabajo se tiene un apéndice donde se presentan las elasticidades más frecuentemente utilizadas en los temas tratados a lo largo del presente artículo.

El modelo general de costos

El desarrollo del modelo general de costos parte del supuesto de que el problema del propietario o del administrador de una firma consiste en establecer un volumen de producción tal que haga máximo el beneficio. Al elegir un determinado nivel de producción (Xo) para un precio dado del producto (P_0), el ingreso total de la firma pasa a ser una constante, de modo tal que para lograr la meta planteada el administrador tiene que hacer mínimo el costo de fabricar dicha cantidad del bien. Sólo las combinaciones de mínimo costo son las relevantes.

Se supone que para producir el bien X se usan sólo dos factores de la producción: trabajo (L) y capital (K). La forma en que ambos factores se combinan de la manera más eficiente viene dada por la función de producción $X = F(L, K)$, que es continua y diferenciable, donde $F(0,0) = 0$. Se considera que el conjunto de producción V(X) satisface las condiciones tradicionales, entre ellas se destacan no vacío, convexo, cerrado, no vacio, irreversibilidad y libre disponibilidad (Debreu 1959). Además, se supone que la firma es tomadora de precios en el mercado de los factores, donde la remuneración al trabajo es w mientras que la retribución del capital es r. De la lectura de los párrafos previos se desprende que el costo total depende de la remuneración a los factores y de las cantidades producidas.

De esta forma el problema de minimización de costos consiste en buscar las combinaciones entre trabajo y capital que permitan obtener diferentes niveles de producción al menor costo posible (la generalización para el caso de n factores no trae mayores inconvenientes al desarrollo que surge de tomar sólo dos factores). El modelo de minimización de costos para el caso de dos factores de la producción puede enunciarse de la siguiente manera:

$$\underset{L,K}{\text{minimizar}}\ C = w\,L + r\,K \qquad (1)$$

$$\text{sujeto a}\ \ X = F(L,K) \qquad (2)$$

donde X es un parámetro que indica un determinado nivel de producción.

Este problema de optimización restringida puede resolverse a través del empleo de la función de Lagrange:

$$G(w,r,\lambda) = w\,L + r\,K + \lambda\,[X - F(L,K)] \qquad (3)$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange.

Para que exista un mínimo local condicionado deben cumplirse dos requisitos: la condición de primer orden y la condición de segundo orden.

La condición de primer orden se obtiene derivando la función dada en (1) con respecto a L, K y λ y se iguala a cero cada una de las derivadas parciales (4):

$$\begin{cases} G_L = w - \lambda F_L = 0 \\ G_K = r - \lambda F_K = 0 \\ G\lambda = X - F(L,K) = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

El punto (L, K y λ) que satisface el sistema dado en (4) es un candidato para ser la solución del problema de optimización (punto estacionario), el cual también debe cumplir con la condición de segundo orden.

La condición de segundo orden para la existencia de un mínimo requiere que el determinante de la matriz orlada evaluada en el punto estacionario sea negativo (ésta matriz se forma con las segundas derivadas parciales de G). En esta oportunidad el determinante de la matriz orlada viene definido de la siguiente manera:

$$D = \begin{vmatrix} -\lambda F_{LL} & -\lambda F_{LK} & - F_L \\ -\lambda F_{KL} & -\lambda F_{KK} & - F_K \\ - F_L & - F_K & 0 \end{vmatrix} < 0 \qquad (5)$$

La condición de segundo orden hace referencia a la forma de la isocuanta. En esta oportunidad la condición de segundo orden dice que para que el problema de minimización que se está planteando tenga solución, la isocuanta debe ser convexa. Aquí se aprecia que los requerimientos en torno a la naturaleza de la función de producción son diferentes a los que deben darse cuando se trata de un problema de maximización de beneficios (Swoboda 2000). Vale resaltar que si la función de producción es cóncava la condición de primer orden no sólo es una condición necesaria sino también una condición suficiente para el problema de minimización de costos.

En el caso en que se tengan n factores de la producción todos los menores principales de la matriz hessiana orlada deben ser estrictamente negativos para verificar la existencia de un mínimo local.

La convexidad de la isocuanta elimina la solución de esquina. Esto está en línea con la observación empírica donde la gran mayoría de las empresas emplea más de un factor de la producción. Si las isocuantas fueran cóncavas el costo mínimo de producción estaría en la intersección de la isocuanta con la línea correspondiente a los ejes de las abscisas o de las ordenadas.

La solución gráfica

En la Figura 1 se tiene la solución gráfica del problema de minimización de costos. El costo mínimo para producir X_0 dado los precios de los factores se da en el punto A donde la pendiente de la isocuanta correspondiente al volumen de producción elegido (X_0) es igual a la pendiente de la línea de isocosto (C_0). De manera tal que la solución del problema de optimización dice que la empresa para producir la cantidad X_0 debe utilizar L_0 y K_0 de trabajo y de capital respectivamente (combinación que pertenece a la línea de isocosto y a la isocuanta, y que es única dadas las características de la función de producción). De este modo se obtiene el menor costo posible de producir la cantidad X_0, que para este caso en general es igual a:

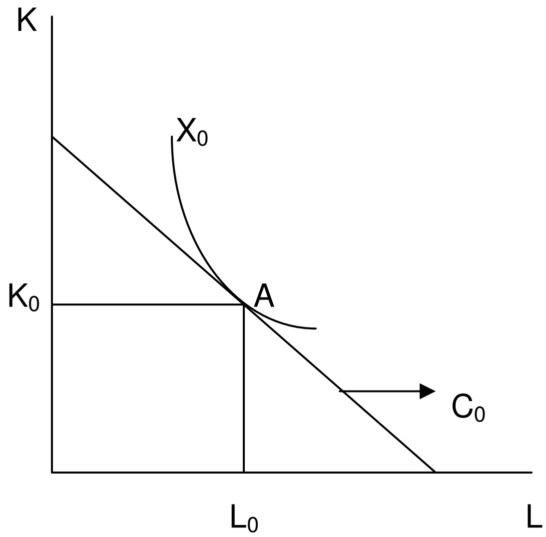
$$C_0 = w\,L_0 + r\,K_0$$

El problema de minimización de costos consiste entonces en elegir la línea de isocosto más próxima al origen que permita obtener el volumen de producción requerido, cuya pendiente es igual a – w / r (relación de cambio en el mercado de los factores de la producción).

Luego, para alcanzar el mínimo costo de producción de la cantidad X_0 del bien X se debe verificar que el cociente entre los precios de los factores (salario / renta) sea igual a la tasa marginal de sustitución técnica del capital por el trabajo (F_L / F_K). En la Figura 1 se aprecia que cualquier desplazamiento a lo largo de la isocosto a partir del punto A equivale a una disminución del nivel de producción (para el precio relativo implícito en la construcción de la línea).

Figura 1

El costo mínimo de producción



Si los precios de los factores de la producción se modifican de forma tal que cambia el precio relativo (pendiente de la línea de isocosto) la firma elegirá otra combinación de capital y trabajo para producir la cantidad determinada X_0. De manera tal que las cantidades K_0 y L_0 ya no representarán la combinación de mínimo costo de producir la cantidad X_0.

Las funciones demandas condicionales de factores y el costo marginal

Ahora bien, si el determinante de las derivadas parciales de un sistema de ecuaciones es distinto de cero, el mismo, en principio, tiene una solución. De esta manera, si se cumple con la condición dada en (5) (el determinante del hessiano orlado es negativo cuando se evalúa en el punto óptimo), el sistema presentado en (4) puede ser resuelto en L, K y λ atendiendo a los diferentes valores de los parámetros del modelo (que son los precios de los factores de la producción y la cantidad producida). La solución queda expresada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} L &= L^*(w, r, X) \\ K &= K^*(w, r, X) \qquad\qquad (6) \\ \lambda &= \lambda^*(w, r, X) \end{aligned}$$

Las dos primeras ecuaciones representan la demanda condicional de mano de obra y la demanda condicional de capital respectivamente que dependen de la remuneración al trabajo, al capital y del volumen de producción (cabe señalar que las mismas son diferentes a las que surgen del problema de maximización de beneficios, donde la palabra condicional hace referencia a que depende del nivel de producción). La tercera ecuación tiene un significado especial, ya que como a continuación se muestra, es el costo marginal de la empresa. Para ver esto se toma en cuenta la primera y luego la segunda ecuación del sistema dado en (4). De ahí surge que:

$$\lambda = \frac{w}{F_L} = \frac{r}{F_K} \qquad (7)$$

Suponga que se produce un incremento muy pequeño en la cantidad utilizada del factor trabajo (ΔL). Esto hace que el costo total aumente en un monto igual a w ΔL (salario por cantidad adicional de trabajo). Por otro lado, el mayor uso de trabajo trae aparejado un crecimiento del producto total equivalente a F_L ΔL (producto marginal por cantidad adicional de trabajo). Luego se debe verificar la siguiente relación:

$$\lambda = \frac{w}{F_L} = \frac{w\,\Delta L}{F_L\,\Delta L}$$

Esta expresión indica el aumento que se produce en el costo cuando se incrementa la producción a raíz de que se ha tomado la decisión de utilizar una mayor cantidad de factor trabajo.

Un procedimiento similar al anterior se emplea para una variación pequeña en el uso del capital el cual arroja las siguientes relaciones algebraicas:

$$\lambda = \frac{r}{F_K} = \frac{r\,\Delta K}{F_K\,\Delta K}$$

Esto implica que los incrementos en los costos a raíz de aumentos en la producción deben ser iguales en los márgenes para cada uno de los factores.

Además, si a las dos primeras ecuaciones de la condición de primer orden dada en (4) se las multiplica por la cantidad de trabajo y capital respectivamente se tienen las siguientes igualdades:

$$w\,L = \lambda\,F_L\,L$$

$$r\,K = \lambda\, F_K\, K$$

Sumando miembro a miembro queda:

$$w\,L + r\,K = \lambda\, F_L\, L + \lambda\, F_K\, K$$

Sacando factor común λ y luego despejando se tiene que el costo marginal puede expresarse de la siguiente manera:

$$\lambda = \frac{w\,L + r\,K}{F_L\, L + F_K\, K}$$

Como se sabe, el cociente entre la remuneración a un factor (que viene expresada en pesos) y su respectivo producto marginal (que viene expresado en unidades físicas del bien X) indica el incremento en la cantidad de pesos por volumen adicional de producción, y esto no es otra cosa que el costo marginal.

Resta ahora por ver cómo esta última interpretación se conecta con la definición tradicional de costo marginal que dice que éste es igual al incremento en el costo total cuando aumenta la producción; donde el incremento en el costo es el mínimo posible que se puede alcanzar para ese aumento en el volumen de producción:

$$CMg = \frac{d\,CT^*}{d\,X}$$

donde CT* es la función de costos (mínimos, ya que está evaluada en el óptimo). La prueba de la conexión entre ambos conceptos es bastante simple. La comprobación parte de la definición tradicional de función de costo y se sustituyen los factores L y K por las funciones obtenidas en (6). Esta da como resultado el costo mínimo para distintos niveles de producción, dada la remuneración a los factores de la producción y la técnica utilizada (bajo las condiciones mencionadas no existe otra forma de producir la misma cantidad del bien X a un costo inferior):

$$CT^* = w\, L^*(w, r, X) + r\, K^*(w, r, X) \qquad (8)$$

Si se deriva parcialmente con respecto a X (teorema de la envolvente) se obtiene el costo marginal:

$$\frac{d\, CT^*}{d\, X} = w \frac{d\, L^*}{d\, X} + r \frac{d\, K^*}{d\, X} \qquad (9)$$

Ahora se sustituye la retribución a los factores de la producción (w, r) por sus iguales obtenidos en la condición de primer orden (λF_L y λF_K respectivamente). Se tiene entonces que:

$$\frac{d\, CT^*}{d\, X} = \lambda\, F_L \frac{d\, L^*}{d\, X} + \lambda\, F_K \frac{d\, K^*}{d\, X} \qquad (10)$$

Sacando a λ como factor común en el segundo miembro de la expresión (10) queda:

$$\frac{d\, CT^*}{d\, X} = \lambda \left(F_L \frac{d\, L^*}{d\, X} + F_K \frac{d\, K^*}{d\, X} \right) \qquad (11)$$

La expresión que en (11) aparece entre paréntesis es igual a uno. Esto se desprende de la tercera ecuación que se tiene en la condición de primer orden:

$$X = F(L, K)$$

Si en esta última igualdad se sustituye a L y K por las demandas antes calculadas surge que:

$$X = F[L^*(w, r, X), K^*(w, r, X)]$$

Derivando con respecto a X queda:

$$1 = F_L \frac{d L^*}{d X} + F_K \frac{d K^*}{d X}$$

De esta forma el costo marginal es igual al coeficiente λ:

$$CMg = d\, CT^* / d\, X = \lambda$$

que es lo que se quería demostrar.

Relación entre la demanda de un factor y sus determinantes

El comportamiento de la demanda de un factor de la producción cuando varía alguno de sus determinantes se encuentra de manera sencilla a través de una adecuada utilización de los conceptos previamente desarrollados. Si a las funciones obtenidas en (6) se las sustituye en el sistema planteado en (4) se tiene la siguiente identidad (la solución de las ecuaciones dadas en (4) es sustituida en el sistema del cual ella surgió):

$$\begin{cases} w - \lambda^* (w,r,X)\, F_L\, [L^*(w,r,X), K^*(w,r,X)] = 0 \\ r - \lambda^* (w,r,X)\, F_K\, [L^*(w,r,X), K^*(w,r,X)] = 0 \\ X - F[L^*(w,r,X), K^*(w,r,X)] = 0 \end{cases} \qquad (12)$$

Para estudiar cómo un cambio en los parámetros (w, r, X) afecta a la demanda de trabajo o de capital y al costo marginal se diferencia el sistema presentado en (12) con respecto a la variable que se desea modificar. Estos pasos pretenden representar el comportamiento de la administración de la empresa ante una modificación en el precio de uno de esos factores o en las cantidades producidas de X, donde ante uno de los hechos recién descriptos los directivos revisan y ajustan en forma inmediata sus planes de utilización de recursos productivos. De este modo la firma permanentemente se encuentra operando en el mínimo costo posible. A su vez dichos cambios se reflejan también en forma inmediata sobre las funciones de demanda de factores.

a. Cambio en la remuneración al trabajo

Suponga que se produce una modificación en el salario manteniéndo constante el precio del capital y la cantidad producida del bien X. Para ver el impacto que la nueva información trae sobre las cantidades demandadas de los factores se diferencia la expresión dada en (12) con respecto a w quedando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 1 - \lambda^* F_{LL} \dfrac{d L^*}{d w} - \lambda^* F_{LK} \dfrac{d K^*}{d w} - F_L \dfrac{d \lambda^*}{d w} = 0 \\[2ex] - \lambda^* F_{KL} \dfrac{d L^*}{d w} - \lambda^* F_{KK} \dfrac{d K^*}{d w} - F_K \dfrac{d \lambda^*}{d w} = 0 \\[2ex] - F_L \dfrac{d L^*}{d w} - F_K \dfrac{d K^*}{d w} = 0 \end{cases}$$

Ordenando adecuadamente los términos que aparecen en el anterior sistema de ecuaciones y resolviendo a través de la regla de Cramer quedan definidas las siguientes tres pendientes de las funciones que se están analizando (la demanda de factor trabajo, la demanda de factor capital y la función de costo marginal):

$$
\text{a1. } \frac{dL^*}{dw} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -\lambda^* F_{LK} & -F_L \\ 0 & -\lambda^* F_{KK} & -F_K \\ 0 & -F_K & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\lambda^* F_{LL} & -\lambda^* F_{LK} & -F_L \\ -\lambda^* F_{KL} & -\lambda^* F_{KK} & -F_K \\ -F_L & -F_K & 0 \end{vmatrix}} = \frac{(F_K)^2}{D} < 0
$$

En esta última expresión el numerador es positivo mientras que el denominador es negativo (viene de la condición de segundo orden del problema de minimización de costos), de modo tal que la pendiente de la función demanda de trabajo resulta negativa cuando se considera una variación en su propio precio. En otros términos cuando sube el salario disminuye la cantidad demandada de trabajo.

$$
\text{a2. } \frac{dK^*}{dw} = \frac{\begin{vmatrix} -\lambda^* F_{LL} & -1 & -F_L \\ -\lambda^* F_{KL} & 0 & -F_K \\ -F_L & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\lambda^* F_{LL} & -\lambda^* F_{LK} & -F_L \\ -\lambda^* F_{KL} & -\lambda^* F_{KK} & -F_K \\ -F_L & -F_K & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-F_L\ F_K}{D} > 0
$$

Dado que los productos marginales de los dos factores de la producción son positivos el numerador de la expresión anterior es negativo, y por otro lado al ser negativo el denominador (viene de la condición de segundo orden) el cociente entre ambos es mayor que cero. Luego, cuando sólo hay dos factores de la producción un aumento en la remuneración al trabajo trae aparejado un incremento en la demanda de capital (recordar que se supone que se mantiene constante el precio del capital y la cantidad producida del bien X). Es decir se sustituye el factor que relativamente se ha hecho más caro por el factor que es más barato, movimiento que se da sobre la misma isocuanta (efecto sustitución).

$$
\text{a3.}\quad \frac{d\lambda^*}{d\,w} = \frac{\begin{vmatrix} -\lambda^* F_{LL} & -\lambda^* F_{LK} & -1 \\ -\lambda^* F_{KL} & -\lambda^* F_{KK} & 0 \\ -F_L & -F_K & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\lambda^* F_{LL} & -\lambda^* F_{LK} & -F_L \\ -\lambda^* F_{KL} & -\lambda^* F_{KK} & -F_K \\ -F_L & -F_K & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-\lambda^* F_{KL} F_K + \lambda^* F_{KK} F_L}{D}
$$

En este caso, el signo del numerador no queda determinado por ninguna condición o relación propia del modelo de minimización de costos, en consecuencia la pendiente puede ser positiva o negativa. Obviamente, si se conoce la estructura analítica de la función de producción la incógnita del signo de la pendiente queda resuelto (sobre este punto se vuelve más adelante).

b.- Cambio en la retribución al capital

Suponga ahora que varía el precio del capital manteniendo constante el salario y la cantidad producida. Siguiendo los pasos mencionados en el punto anterior se tienen las respectivas pendientes de las funciones de demanda con sus correspondientes signos:

$$
\text{b1.-}\quad \frac{d\,L^*}{d\,r} = \frac{-F_L F_K}{D} > 0
$$

$$b2.- \quad \frac{d K^*}{d r} = \frac{(F_L)^2}{D} < 0$$

$$b3.- \quad \frac{d \lambda^*}{d r} = \frac{- \lambda^* F_{KL} \; F_L + \lambda^* F_{LL} F_K}{D}$$

La relación de simetría

Al observar la estructura analítica de la pendiente de la función demanda de trabajo cuando varía el precio del capital (punto a1), se aprecia que es igual a la pendiente de la función demanda de capital cuando se modifica el precio del factor trabajo (punto b2). A esta propiedad se la conoce como relación o condición de simetría.

$$\frac{d L^*}{d r} = \frac{- F_L F_K}{D} = \frac{d K^*}{d w}$$

La condición de simetría surge del problema de minimización de costos donde se tiene que los efectos cruzados de las remuneraciones a los factores de la producción son idénticos y positivos.

c.- Cambio en la cantidad producida

En esta oportunidad el sistema dado en (12) se diferencia con respecto a la cantidad producida X, arrojando el siguiente resultado:

$$
\begin{cases}
-\lambda^* F_{LL} \dfrac{d L^*}{dX} - \lambda^* F_{LK} \dfrac{d K^*}{d X} - F_L \dfrac{d \lambda^*}{d X} = 0 \\[2ex]
-\lambda^* F_{KL} \dfrac{d L^*}{dX} - \lambda^* F_{KK} \dfrac{d K^*}{d X} - F_L \dfrac{d \lambda^*}{d X} = 0 \\[2ex]
1 \quad - F_L \dfrac{d L^*}{dX} - F_K \dfrac{d K^*}{d X} = 0
\end{cases}
$$

Usando la regla de Cramer quedan las siguientes tres pendientes: dos correspondientes a las funciones de demanda de trabajo y de capital y la de la función de costo marginal cuando varía la cantidad producida del bien X:

$$
\text{c1.} \quad \frac{d L^*}{d X} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\lambda^* F_{LK} & -F_L \\ 0 & -\lambda^* F_{KK} & -F_K \\ -1 & -F_K & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\lambda^* F_{LL} & -\lambda^* F_{LK} & -F_L \\ -\lambda^* F_{KL} & -\lambda^* F_{KK} & -F_K \\ -F_L & -F_K & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-\lambda^* F_{LK} F_K + \lambda^* F_{KK} F_L}{D}
$$

En esta última expresión el signo del numerador no queda definido por el modelo de optimización de costos de forma tal que, sin información específica acerca de la naturaleza de la función de producción, no puede decirse nada más en torno a la relación entre la utilización del factor trabajo y la cantidad producida.

$$\text{c2.}\quad \frac{d\,K^*}{d\,X} = \frac{\begin{vmatrix} -\lambda^* F_{LL} & 0 & -F_L \\ -\lambda^* F_{KL} & 0 & -F_K \\ -F_L & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\lambda^* F_{LL} & -\lambda^* F_{LK} & -F_L \\ -\lambda^* F_{KL} & -\lambda^* F_{KK} & -F_K \\ -F_L & -F_K & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-\lambda^* F_{KL}\ F_L + \lambda^* F_{LL} F_K}{D}$$

En cuanto al signo del numerador caben las mismas consideraciones efectuadas en el punto anterior (por tanto no queda definida la relación entre K y X).

$$\text{c3.}\quad \frac{d\,\lambda^*}{d\,X} = \frac{\begin{vmatrix} -\lambda^* F_{LL} & -\lambda^* F_{LK} & 0 \\ -\lambda^* F_{KL} & -\lambda^* F_{KK} & 0 \\ -F_L & -F_K & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\lambda^* F_{L} & -\lambda^* F_{LK} & -F_L \\ -\lambda^* F_{KL} & -\lambda^* F_{KK} & -F_K \\ -F_L & -F_K & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-\lambda^{*2} F_{LL} F_{KK} + \lambda^{*2} (F_{KL})^2}{D}$$

En esta ocasión se tiene la derivada parcial del costo marginal respecto a la cantidad producida. Si en el numerador se efectúan algunos arreglos en los términos involucrados queda $-\lambda^{*2}\,[F_{LL}\ F_{KK} - (F_{LK})^2]$ donde la expresión entre barras es parte de la condición de segundo orden para la maximización de beneficios y como se recordará tiene signo positivo. No obstante este requisito que es parte del problema de minimización de costos, no viene expresamente especificado en el modelo.

Entonces, en los problemas de minimización de costos las condiciones que se ponen en torno a las funciones de producción son menos restrictivas que las que se utilizan cuando se está frente a problemas de maximización de beneficios.

Dos relaciones importantes en la teoría de los costos

Al observar las pendientes calculadas cuando se derivó el costo marginal con respecto a la remuneración a los factores (a3 y b3) y cuando se derivó la demanda de factor con respecto al volumen de producción (c1 y c2) surgen otras dos importantes relaciones (igualdades) que a continuación se detallan:

$$\begin{cases} \dfrac{d\lambda^*}{dw} = \dfrac{-\lambda^* F_{KL} F_K + \lambda^* F_{KK} F_L}{D} = \dfrac{dL^*}{dX} \\[2ex] \dfrac{d\lambda^*}{dr} = \dfrac{-\lambda^* F_{KL} F_L + \lambda^* F_{LL} F_K}{D} = \dfrac{dK^*}{dX} \end{cases}$$

Las mismas indican que el cambio que se produce en el costo marginal cuando varía la remuneración a un factor de la producción es similar al cambio que se da en la cantidad demanda de ese factor cuando varía la cantidad producida del bien X (sobre este punto se vuelve más adelante).

Lema de Shephard

Queda por demostrar que si se deriva la función lagrangeana o la función de costos recientemente obtenida con respecto a la retribución a los factores de la producción se tiene por resultado las respectivas funciones de demanda (trabajo y capital), mientras que si ambas se derivan con respecto a la cantidad producida se logra el costo marginal. Esta propiedad se obtiene aplicando el teorema de la función envolvente. Este teorema sostiene que si se tiene el siguiente problema de optimización restringida (para el caso de minimización costos):

$$\underset{L,K}{\text{minimizar}}\ C = w\,L + r\,K$$

$$\text{sujeto a}\quad X = F(L,K)$$

donde la función Lagrangeana viene dada por

$$G = w\,L + r\,K + \lambda\,[\,X_0 - F(L,K)]$$

Es posible establecer que:

$$\frac{d\,G}{d\,w} = \frac{d\,C^*}{d\,w} = L = L^*(w,r,X) \qquad (13)$$

$$\frac{d\,G}{d\,r} = \frac{d\,C^*}{d\,r} = K = K^*(w,r,X) \qquad (14)$$

$$\frac{d\,G}{d\,X} = \frac{d\,C^*}{d\,X} = \lambda = \lambda^*(w,r,X) \qquad (15)$$

Las ecuaciones (13) y (14) se conocen con el nombre de Lema de Shephard (1953) y son de suma importancia en el análisis microeconómico. La obtención de las mismas surge de diferenciar G o C* con respecto a la remuneración a los factores y luego arreglar en forma adecuada los términos involucrados. Aquí hay que tener en claro el mensaje que trasmiten ambas relaciones. Estas dicen que la variación que se produce en el costo cuando se modifica el precio de un factor debe ser igual a la cantidad óptima que de ese factor se emplea al nuevo precio.

A continuación se muestra como se llegó a los resultados de las relaciones recién presentadas en (13), (14) y (15).

a.- Para el caso del factor trabajo surgen las siguientes relaciones:

$$\frac{dG}{dw} = \frac{dC^*}{dw} = L + w\frac{dL}{dw} + r\frac{dK}{dw} + \frac{d\lambda}{dw}[X-F(L,K)] - \lambda F_L\frac{dL}{dw} - \lambda F_K\frac{dK}{dw}$$

Agrupando términos:

$$\frac{dG}{dw} = \frac{dC^*}{dw} = L + \frac{dL}{dw}[w - \lambda F_L] + \frac{dK}{dw}[r - \lambda F_K]$$

De la condición de primer orden del problema de minimización de costos se desprende que $w = \lambda F_L$ y $r = \lambda F_K$, por lo tanto:

$$\frac{d\,G}{d\,w} = \frac{d\,C^*}{d\,w} = L = L^*(w,r,X) \qquad (13)$$

Esta última expresión es la función demanda de mano de obra, que es lo que se quería demostrar.

b.- Mientras que para el factor capital, siguiendo un procedimiento similar al utilizado en el punto anterior, se desprende que:

$$\frac{d\,G}{d\,r} = \frac{d\,C^*}{d\,r} = K = K^*(w,r,X) \qquad (14)$$

que es la función demanda del factor capital.

c.- Por último, si a alguna de las dos siguientes funciones G o a C* se las deriva con respecto al volumen de producción queda:

$$\frac{dG}{dX} = \frac{dC^*}{dX} = w\frac{dL}{dX} + r\frac{dK}{dX} + \frac{d\lambda}{dX}[X-F(L,K)] + \lambda\left(1 - F_L\frac{dL}{dX} - F_K\frac{dK}{dX}\right)$$

$$\frac{dG}{dX} = \frac{dC^*}{dX} = \lambda + \frac{dL}{dX}[w - \lambda F_L] + r\frac{dK}{dX}[r - \lambda F_K] + \frac{d\lambda}{dX}[X-F(L,K)]$$

Al igual que en el caso anterior, de la condición de primer orden se obtienen las siguientes relaciones básicas:

$$w = \lambda F_L$$
$$r = \lambda F_K$$
$$X = F(K,L)$$

Por lo tanto, la derivada de G con respecto a X da como resultado el costo marginal (con antelación ya se había demostrado que $dC^*/dX = \lambda$):

$$\frac{dG}{dX} = \frac{dC^*}{dX} = \lambda = \lambda^*(w,r,X) \qquad (15)$$

La obtención de algunas relaciones ya conocidas

Si se toman algunas de las relaciones matemáticas establecidas en desarrollos previos y se derivan con respecto a los diferentes parámetros del modelo de minimización de costos (w,r,X) se obtienen una serie de expresiones algebraicas muy útiles para lograr una mejor comprensión del tema que se está tratando:

a.- La relación de simetría: si se deriva la función de costos con respecto a la remuneración de cada uno de los dos factores de la producción (w y r) se obtienen las pendientes de las funciones de demanda de trabajo y de capital respectivamente. Acorde a lo demostrado al tratar el lema de Shephard (ecuaciones 13 y 14) se tiene que:

$$dC^* / dw = L^* \quad y \quad dC^* / dr = K^* \tag{16}$$

Si ahora se deriva la primera expresión de (16) con respecto a la retribución al capital (r) y la segunda con respecto a la remuneración al factor trabajo (w) queda:

$$d^2C^* / dw\, dr = dL^* / dr \tag{17}$$

y

$$d^2C^* / dr\, dw = dK^* / dw \tag{18}$$

Pero en virtud de que las derivadas segundas cruzadas son iguales (las derivadas parciales de la función de costos no se modifican según sea el orden de derivación). De esta forma:

$$\frac{d^2\, C^*}{d\,w \;\; d\,r} = \frac{d^2\, C^*}{d\,r \;\; d\,w} \tag{19}$$

Luego se verifica que:

$$\frac{d\, L^*}{d\, r} = \frac{d\, K^*}{d\, w} \tag{20}$$

Esta ultima expresión es la ya conocida condición de simetría tratada en el apartado “Relación entre la demanda de un factor y sus determinantes”.

b.- Si se deriva dos veces la función de costos, primero con respecto al volumen de producción (X) y después con respecto a la retribución al factor trabajo (w) y se repite el procedimiento pero a la inversa, se obtiene la igualdad entre la pendiente del costo marginal con respecto a la retribución al trabajo y la pendiente de la demanda de mano de obra con relación al volumen de producción. Al considerar el lema de Shephard se obtuvo que (ecuaciones 15 y 13):

$$dC^* / dX = \lambda^* \quad \text{y} \quad dC^* / dw = L^*$$

Derivando ahora la primera ecuación con respecto a w y la segunda con respecto a X se obtiene:

$$d^2C^* / dX\, dw = d\lambda^* / dw \quad \text{y} \quad d^2C^* / dw\, dX = dL^* / dw \qquad (21)$$

Pero como las derivadas parciales segundas cruzadas son iguales surge que:

$$\frac{d\,\lambda^*}{d\,w} = \frac{d\,L^*}{d\,X} \qquad (22)$$

c.- Lo demostrado en el punto b también es válido para el otro factor de la producción. Entonces se tiene que:

$$\frac{d\,\lambda^*}{d\,r} = \frac{d\,K^*}{d\,X} \qquad (23)$$

ya que:

$$\frac{d^2 C^*}{d X \, d r} = \frac{d^2 C^*}{d r \, d X} \qquad (24)$$

El desplazamiento del costo marginal cuando se modifica la retribución a los factores de la producción

En este punto se pretende realizar algunas reflexiones adicionales en torno a la recién considerada relación entre el costo marginal y los cambios en las retribuciones a los factores de la producción (la misma también se trató, pero desde otro punto de vista, en el apartado "Relación entre la demanda de un factor y sus determinantes", incisos a.3 y b.3). En un desarrollo previo se mostró que el costo marginal es una función cuyos argumentos son el precio del trabajo, el precio del capital y el nivel de producción. También se estableció que el costo marginal es igual a la derivada parcial de la función de costos (C*) con respecto a la cantidad producida (X). Además, la función de costos es creciente en términos del volumen de producción (esta es una de las propiedades de la función de costos tal como se verá más adelante). De modo tal que el costo marginal es mayor o igual a cero:

$$dC^* / dX = CMg = \lambda \geq 0$$

Asimismo se demostró que el signo del cambio en el costo marginal cuando se modifica la retribución del trabajo o del capital:

$$dCMg / dw \quad y \quad dCMg / dr$$

no estaba bien definido (este podía ser positivo o negativo ver puntos a.3 y b.3 del apartado "La relación entre la demanda ...), ya que en el problema de minimización de costo no existían condiciones específicas que así lo determinasen.

Por otro lado, tampoco quedó definido lo que sucedía con la demanda de los factores trabajo y capital cuando se presentaba una variación en el nivel de producción. En un apartado anterior se demostró que las derivadas parciales dL / dX y dK / dX no tenían un signo que viniese claramente definido por las condiciones del problema de minimización de costos (en los puntos c1 y c2 del apartado “La relación entre la demanda de un factor y sus determinantes” se mostró que cabía la posibilidad de que dichas pendientes fuesen mayor o menor que cero; esto implica que ante un aumento en el volumen de producción el nivel de uso de un factor puede subir o bajar).

Adicionalmente, en desarrollos previos se establecieron las siguientes cuatro relaciones, relativas a las derivadas segundas parciales cruzadas:

$$d^2C^* / dX\ dw = dCMg / dw = d\lambda / dw \qquad (21)$$

$$d^2C^* / dX\ dr = dCMg / dr = d\lambda / dr \qquad (24)$$

$$d^2C^* / dw\ dX = dL / dX$$

$$d^2C^* / dr\ dX = dK / dr$$

Donde por el teorema de Young se verifica que:

$$d^2C^* / dX\ dw = d^2C / dw\ dX$$

$$d^2C^* / dX\ dr = d^2C / dr\ dX$$

De forma tal que:

$$\begin{aligned} dCMg / dw &= dL / dX \\ dCMg / dr &= dK / dX \end{aligned} \qquad (25)$$

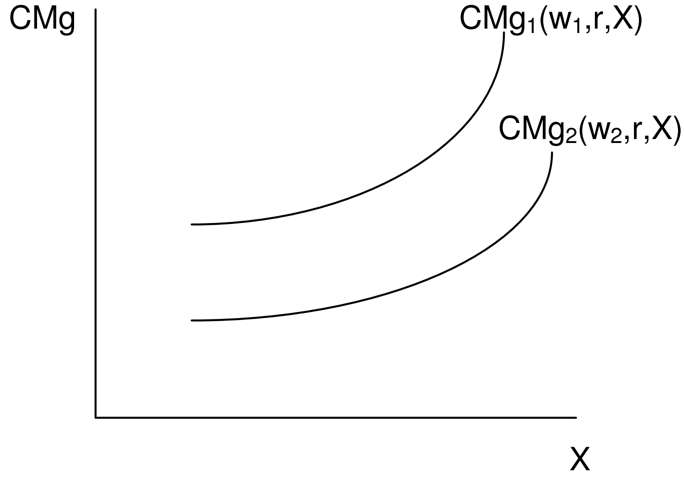
Luego, el efecto que sobre el costo marginal tiene una variación en la retribución al trabajo es igual al impacto que sobre la demanda de trabajo tiene una modificación en el volumen de producción (si bien es un paso adelante en el entendimiento del problema de los costo el mismo no es un avance en términos de establecer el signo de las respectivas pendientes). Sin embargo, si se conoce que pasa con la cantidad demanda de factor trabajo cuando se produce un incremento en el volumen de producción, automáticamente se sabe el signo de de la derivada parcial del costo marginal con respecto a la retribución del trabajo ($d\lambda$ / dw). El mismo razonamiento es también válido para el signo de la derivada parcial del costo marginal con respecto a la retribución al capital ($d\lambda$ / dr).

En esta altura del desarrollo se pueden realizar algunas especulaciones en torno a los signos de las derivadas parciales planteadas en (25) recurriendo a los conceptos de factores normales y factores inferiores. Si las dos pendientes dL / dX y dK / dX son positivas se está frente a factores de la producción normales (cuando aumenta el volumen de producción se incrementa la cantidad demanda de ambos factores). Pero si esto no se verifica, uno de los dos factores es inferior, donde este fenómeno puede explicarse en términos de la existencia de especialización, indivisibilidades, etcétera (esto es cierto sólo para un tramo del intervalo de producción ya que un factor no puede ser permanentemente inferior; es decir podría darse que en niveles de escala pequeños el factor es indispensable, siendo sustituido en volúmenes de producción más elevados). Esto último implica que la senda de expansión presenta una curvatura; sin embargo dado que las funciones de producción más relevantes en la literatura son las homotéticas, la senda de expansión de la firma es lineal, lo cual garantiza que los dos factores de la producción son normales.

De las consideraciones previas se desprende que en términos del diagrama tradicional CMg – X que presenta la Figura 2, cuando cambia la remuneración de un factor de la producción el costo marginal puede desplazarse hacia arriba o hacia abajo. La Figura 2 muestra dos funciones de costo marginal (CMg_1 y CMg_2) correspondientes a dos valores diferentes de la remuneración al trabajo (w_1 y w_2), donde sin la existencia de información adecuada no es posible determinar si w_1 es mayor o menor que w_2. Luego cuando sube el precio del factor trabajo el costo marginal puede desplazarse hacia arriba o hacia abajo (lo mismo para el caso del capital).

Figura 2

Desplazamientos en el costo marginal cuando se modifica el salario



Algunas propiedades relacionadas con la función de costos

La función de costos considerada en los puntos anteriores tiene algunas propiedades que son de mucha utilidad ya sea en los desarrollos de la teoría económica como en las estimaciones econométricas. Entre ellas se destacan las siguientes (algunas de las propiedades ya han sido consideradas en el tratamiento del tema de minimización de costos):

a.- Las demandas de factores de la producción son homogéneas de grado cero en términos de los precios de los factores

Las funciones de demanda de factor son homogéneas de grado cero en término de los precios. Sea θ igual a uno más la tasa de variación de la retribución a los factores de la producción, luego se tiene que:

$$L^*(\theta w, \theta r, X) = L^*(w, r, X)$$
$$\qquad (26)$$
$$K^*(\theta w, \theta r, X) = K^*(w, r, X)$$

En otras palabras si se produce un incremento porcentual semejante en el precio de ambos factores manteniendo constante el nivel de producción, la cantidad demanda de cada uno de ellos no varía. En otros términos sólo interesan los cambios en los precios relativos para modificar las relaciones ya establecidas (la combinación entre el trabajo y el capital se mantiene inalterada si los precios se modifican en el mismo porcentaje). La demostración de esta condición es relativamente simple, para ello se parte de un costo total incrementado en un coeficiente θ y se desarrollan todos los pasos enunciados en el problema de optimización planteado al inicio del artículo.

De esta forma, ahora se tiene el siguiente problema de optimización restringida:

$$\underset{L,\,K}{\text{minimizar}} \quad \theta\, w\, L + \theta\, r\, K$$
$$\text{sujeto a} \quad F(L,K) = X_0$$

La condición de primer orden es igual a:

$$\begin{cases} G_L = \theta\, w - \lambda\, F_L = 0 \\ G_K = \theta\, r - \lambda\, F_K = 0 \\ G\lambda = X_0 - F(L, K) = 0 \end{cases}$$

Dividiendo miembro a miembro la primera y la segunda ecuación de la condición de primer orden queda:

$$\frac{\theta\, w}{\theta\, r} = \frac{\lambda\, F_L}{\lambda\, F_K}$$

donde simplificando θ se obtiene $w / r = F_L / F_K$, que es la misma relación que se alcanzó sin considerar la suba en los precios de los factores. La Figura 1 muestra que la combinación óptima de capital y trabajo que hay que utilizar para producir la cantidad X_0 se obtiene igualando la pendiente de la isocuanta con la pendiente de la línea de isocosto. Si la remuneración al capital y al trabajo se duplica o triplica el precio relativo no varía, por ende no se modifica la pendiente de la línea de isocosto y por tanto no se altera el uso de los factores (obviamente el costo total sí se ve afectado por la variación de los precios absolutos de los factores).

b.- La función de costo total es homogénea de grado uno en términos de las remuneraciones a los factores de la producción

La función de costo total es homogénea de grado uno en términos de los precios de los factores de la producción. Si la remuneración al trabajo y al capital sube en una proporción θ el costo total se incrementa en la misma proporción. La demostración parte de la definición de costo (indirecto):

$$C^*(\theta\, w, \theta\, r, X) = \theta\, w\, L^*\, (\theta\, w, \theta\, r, X) + \theta\, r\, K^*\, (\theta\, w, \theta\, r, X) \qquad (27)$$

Aplicando la propiedad de que las demandas de factor son homogéneas de grado cero, quedan las siguientes igualdades:

$$C^*(\theta\, w, \theta\, r, X) = \theta\, [w\, L^*\, (w, r, X) + r\, K^*\, (w, r, X)] = \theta\, C^*$$

que es lo que se quería demostrar.

Las funciones de costo medio y de costo marginal

Es sencillo demostrar que las funciones de costo promedio y marginal son funciones homogéneas de grado uno en términos de los precios de los factores.

b.1.-El Costo Medio

En el caso del costo medio se tiene la función de costo total dividida por la cantidad de producción:

$$CMe(w,r,X) = \frac{C^*(w,r,X)}{X}$$

Tomando en cuenta el incremento θ queda:

$$CMe(\theta w, \theta r ,X) = \frac{C^* (\theta w, \theta r ,X)}{X} = \theta \frac{C^*}{X}$$

Luego:

$$CMe(\theta w, \theta r, X) = \theta\, CMe(w, r, X) \qquad (28)$$

b.2.- El Costo Marginal

Mientras que para el costo marginal se tiene que:

$$CMg(w,r,X) = \frac{d\, C^*(w,r,X)}{d\, X}$$

Entonces:

$$CMg\ (\theta w, \theta r, X) = \frac{d\ C^*(\theta w, \theta r, X)}{d\ X} = \theta\ \lambda^*(w, r, X) \qquad (29)$$

Esto último proviene de la condición de primer orden del problema de minimización donde se tiene que:

$$\lambda^*\ (\theta w, \theta r, X) = \frac{\theta\ w}{F_L(L^*,K^*)}$$

c.- La función de costos es no decreciente en términos de la remuneración a los factores de la producción. Es decir si $(w,r)_1$ y $(w,r)_0$ son dos vectores de precios de los factores de la producción, donde $(w,r)_1 \geq (w,r)_0$, luego se tiene la siguiente relación entre los costos:

$$C[(w,r)_1,X] \geq C[(w,r)_0,X] \qquad (30)$$

Para comprobar esta propiedad se toman en cuenta dos asignaciones de trabajo y capital $(L,K)_1$ y $(L,K)_0$ que minimizan el costo de producción de la cantidad X a los precios $(w,r)_1$ y $(w,r)_0$ respectivamente, donde $(w,r)_1 \geq (w,r)_0$. Acorde a las propiedades de los resultados que arroja el problema de minimización de costos se tiene que:

$$(w,r)_0\ (L,K)'_0 \leq (w,r)_1\ (L,K)'_1$$

Por otro lado, la asignación de trabajo y capital $(L,K)_1$ valuada a los dos pares de precios de los factores considerados cumple con la siguiente relación de desigualdad:

$$(w,r)_0\ (L,K)'_1 \ \leq\ (w,r)_1\ (L,K)'_1$$

en virtud de que $(w,r)_0 \leq (w,r)_1$ y de las propiedades de las soluciones del problema de minimización de costos.

Si ahora se combinan las diferentes desigualdades que se presentaron con anterioridad se tiene la siguiente cadena:

$$(w,r)_0\ (L,K)'_0 \ \leq\ (w,r)_0\ (L,K)'_1 \ \leq\ (w,r)_1\ (L,K)'_1$$

A su vez esto es equivale a:

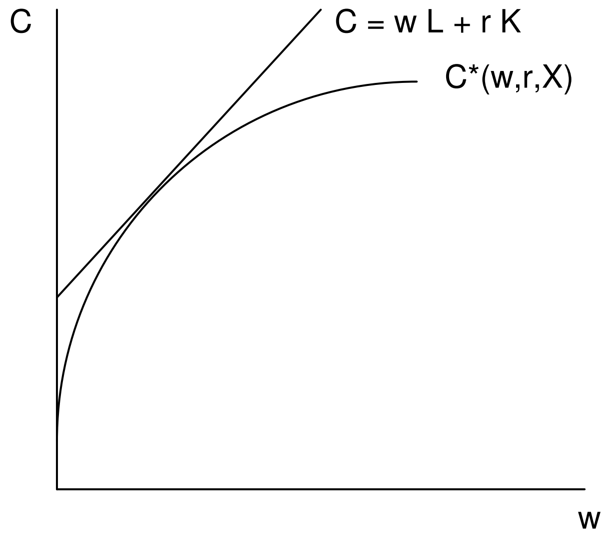
$$C[(w,r)_1,X] \geq C[(w,r)_0,X]$$

que es lo que se quería demostrar.

Por lo tanto la función de costos (C*) es no decreciente en términos de la remuneración a los factores de la producción tal como se lo presenta en la Figura 3.

Figura 3

Los costos y el precio de los factores



Esto último también puede complementarse con la información obtenida al derivar la función de costos con respecto a las retribuciones a los factores de la producción, donde al ser la función de costos no decreciente en términos de los precios de los factores de la producción se tienen que verificar las siguientes dos condiciones:

$$d\,C^* / d\,w = L^*(w,r,X) > 0$$

$$d\,C^* / d\,r = K^*(w,r,X) > 0$$

d.- La función de costo es cóncava en términos de la retribución a los factores de la producción.

En la Figura 3 se presenta el costo (C y C*) en función del precio del factor trabajo (w), manteniendo constante el precio del capital (r) y el volumen de producción (X). Adviértase que en los ejes de la Figura 3 se tienen las siguientes variables C, C* en la ordenada y w en la abscisa. Si ahora se considera la función primitiva de costos $C = w\,L + r\,K$, se tiene que un aumento en la retribución al factor trabajo (w) trae aparejado una suba en el costo (C) que es superior a la que se registra en C*.

Esto último se debe a que al aumentar el salario el costo no disminuye según se vio en puntos anteriores, pero el incremento se da a una tasa decreciente, debido a que la firma en la búsqueda de minimizar el costo de producción sustituye el factor que se ha hecho relativamente más caro por el factor cuyo precio se mantuvo constante (función C*).

Una prueba más rigurosa de esta propiedad se logra a través del razonamiento que a continuación se desarrolla. Suponga que z y z’ son dos vectores que indican el nivel de utilización óptimo de los factores trabajo y capital para producir la cantidad X_0 del bien X, para las remuneraciones p y p’ de los factores de la producción (en la Figura 4 las respectivas combinaciones óptimas están representadas por las letras A y B).

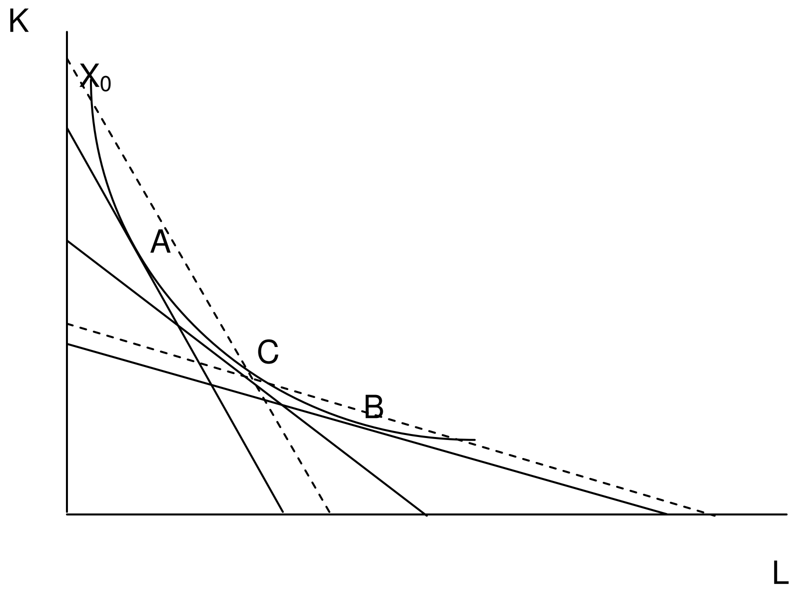
Considere que es posible definir una combinación convexa de los dos vectores de precios de los factores, la cual se simboliza por p_0:

$$p_0 = t\,p + (1 - t)\,p' \qquad \text{para } t\ \varepsilon\ (0, 1) \qquad (31)$$

Suponga ahora que para los precios de los factores dados en p_0 la combinación óptima de uso del trabajo y del capital (mezcla que minimiza el costo de producción de X_0 para ese precio relativo) se la representa a través de z_0 (esta se corresponde con la letra C en la Figura 4).

Figura 4

Las asignaciones óptimas de trabajo y capital



Asimismo, al ser las isocuantas convexas la combinación de trabajo y capital establecida en el vector z_0 puede ser utilizada para producir la cantidad X_0 a los precios p y p'.

Entonces, acorde a las propiedades que surgen de la solución del problema de minimización de costos se tienen que cumplir las siguientes desigualdades (líneas de puntos en la Figura 4):

$$p\,z \le p\,z_0$$

$$p' z' \leq p' z_0$$

Multiplicando la primera desigualdad por t y la segunda por (1 – t) queda:

$$t\, p\, z \leq t\, p\, z_0$$

$$(1 - t)\, p' z' \leq (1 - t)\, p' z_0$$

Sumando miembro a miembro estas dos últimas desigualdades se obtiene la siguiente desigualdad:

$$t\, p\, z + (1 - t)\, p' z' \leq t\, p\, z_0 + (1 - t)\, p' z_0 \qquad (32)$$

Sacando z_0 como factor común en el segundo miembro se tiene:

$$t\, p\, z + (1 - t)\, p' z' \leq [t\, p + (1 - t)\, p']\, z_0$$

Pero al ser $[t\, p + (1 - t)\, p'] = p_0$ (según (31)), sustituyendo en el segundo miembro de la anterior desigualdad se obtiene que:

$$t\, p\, z + (1 - t)\, p' z' \leq p_0\, z_0$$

Por otro lado, acorde a las propiedades del modelo de minimización de costos se tienen las siguientes tres igualdades:

$$C(p, X_0) = p\, z$$
$$C(p', X_0) = p' z$$
$$C(p_0, X_0) = p_0\, z$$

Si ahora estas tres igualdades se sustituyen en la última desigualdad se tiene que:

$$t\, C(p, X_0) + (1 - t)\, C(p', X_0) \leq C(p_0, X_0) \qquad (33)$$

Luego, la función de costos es cóncava en términos de las retribuciones a los factores de la producción.

e.- La función de costos es no decreciente en términos del volumen de producción. Es decir, si se tienen dos volúmenes de producción $X_1 \geq X_0$, luego $C(w,r,X_1) \geq C(w,r,X_0)$. Si esto no fuese así podría obtenerse un mayor nivel de producción del bien X a un mismo volumen de erogaciones en capital y en trabajo.

f.- Si la función de producción es cóncava en todo su dominio la función de costos es convexa en X. En esta oportunidad el costo marginal es no decreciente en términos del volumen de producción.

g.- La función de costo es continua en términos de la remuneración a los factores de la producción. Esta propiedad se deriva de la naturaleza de las condiciones establecidas en el problema de optimización. La isocuanta es convexa y la función de costos es lineal. Luego, si los cambios en el precio de los factores son continuos hay una sustitución continua a lo largo de la isocuanta, donde dada la linealidad de la función de costos está se modifica en forma continua.

h.- Lema de Shephard: la derivada parcial de la función de costos con respecto a la retribución a un factor de la producción es igual a la función demanda del factor. Para el caso de la retribución al trabajo y al capital se tienen las siguientes dos igualdades:

$$dC^*(w,r,X) / dw = L \quad y \quad dC^*(w,r,X) / dr = K$$

i.- No negatividad: la función de costos mínimos C*(w,r,X) es mayor que cero para w, r > 0 y X > 0. Esto implica que producir una cantidad positiva del bien X (X > 0) ante factores de la producción no libres, se incurre en un determinado nivel de gasto.

j.- La función de costos medios se mueve en la misma dirección en que cambian los precios de los factores de la producción. La comprobación de que la función de costos medios se desplaza en el mismo sentido en que se modifican los precios de los factores de la producción toma como punto de partida el cociente entre el costo (C*) y la producción (X). Luego se deriva el costo medio con respecto al precio de uno de los factores. De esta manera se tiene que la derivada parcial del costo medio con respecto al salario es igual a:

$$\frac{d\,CMe}{d\,w} = \left[L^* + w\frac{dL}{dw} + r\frac{dK}{dw} \right] \frac{1}{X} = \frac{L^*}{X} > 0 \qquad (34)$$

Pero, como se recordará la expresión entre corchetes es igual a cero, luego:

$$\frac{d\,CMe}{d\,w} = \frac{L^*}{X} > 0 \qquad (34)$$

Mientras que la derivada parcial del costo medio con respecto a la remuneración al capital es igual a:

$$\frac{d\,CMe}{d\,r} = \frac{K^*}{X} > 0 \qquad (35)$$

Por lo tanto el costo medio se mueve en la misma dirección en que se modifican los precios del trabajo y del capital. Un resultado similar se obtiene utilizando el teorema de la envolvente.

Las principales propiedades de las funciones condicionales de demanda de un factor

Las principales propiedades de las funciones condicionales de demanda de los factores de la producción trabajo y capital [L(w,r,X) y K(w,r,X)] pueden sintetizarse en los siguientes puntos:

a.- Simetría

$$\frac{d\,L^*}{d\,r} = \frac{d\,K^*}{d\,w} \qquad (36)$$

Esta propiedad dice que en el margen el efecto que produce una suba en el precio del capital sobre la demanda de trabajo es igual al afecto que produce una suba en el precio del trabajo sobre la demanda de capital. Esta es una propiedad no muy intuitiva desde el punto de vista económico, donde la misma puede obtenerse a través de diferentes procedimientos tal como se mostró en los apartados previos.

b.- Homogeneidad

Al ser las demandas de factor homogéneas de grado cero para el caso del factor trabajo se cumple que:

$$L^*(\theta w,\, \theta r,\, X) = L^*(w,r,X) \qquad (37)$$

Luego, por el teorema de Euler, se tiene que:

$$\frac{d L^*}{d \theta w} \frac{d \theta w}{d \theta} + \frac{d L^*}{d \theta r} \frac{d \theta r}{d \theta} = 0$$

Haciendo $\theta = 1$ se tiene:

$$w \frac{d L^*}{d w} + r \frac{d L^*}{d r} = 0 \qquad (38)$$

Mientras que para el caso del factor capital se obtiene:

$$w \frac{d K^*}{d w} + r \frac{d K^*}{d r} = 0 \qquad (39)$$

Las relaciones económicas anteriores presentadas en los puntos (38) y (39) pueden ser expresadas en término de elasticidad quedando las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{Lw} + \varepsilon_{Lr} &\equiv 0 \\ \varepsilon_{Kw} + \varepsilon_{Kr} &\equiv 0 \end{aligned} \qquad (40)$$

La suma algebraica de la elasticidad propia más la elasticidad cruzada es igual a cero.

c.- Semi definida negativa

La pendiente de la demanda de trabajo o de capital cuando se considera su propio precio es negativa. En otros términos y a modo de ejemplo puede decirse que una suba en la retribución al trabajo disminuye la cantidad demandada de trabajo o que una baja en el precio del capital aumenta la cantidad demandada de capital:

$$\frac{d\,L^*}{d\,w} < 0 \qquad \frac{d\,K^*}{d\,r} < 0 \qquad (41)$$

Esta propiedad, al igual que la enunciada en el punto previo, se demostró a lo largo del desarrollo de diferentes formas. La relación dada en (41) también se desprende realizando el siguiente razonamiento: la concavidad de la función de costos en términos de los precios de los factores implica:

$$\frac{d^2\,C^*}{d\,w^2} = \frac{d\,L^*}{d\,w} < 0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2\,C^*}{d\,r^2} = \frac{d\,K^*}{d\,r} < 0$$

Además, también se verifica la siguiente desigualdad:

$$\frac{d\,L^*}{d\,w}\;\frac{d\,K^*}{d\,r} - \frac{d\,L^*}{d\,r}\;\frac{d\,K^*}{d\,w} > 0 \qquad (42)$$

d.- Envolvente

Para ver el origen de esta propiedad se parte de la función de producción tradicional y se la expresa en términos de la demanda de los dos factores (trabajo y capital):

$$X_0 = F(L^*, K^*) \qquad (43)$$

diferenciando con respecto a una de las retribuciones (por ejemplo w) queda:

$$0 = \frac{dF}{dL^*}\frac{dL^*}{dw} + \frac{dF}{dK}\frac{dK}{dw} \qquad (44)$$

Ordenando términos:

$$F_L \frac{d\,L^*}{d\,w} + F_K \frac{d\,K^*}{d\,w} \equiv 0 \qquad (45)$$

Por otro lado, de la condición de primer orden del problema de minimización de costos surge que:

$$w = \lambda F_L$$
$$r = \lambda F_K$$

Luego, sustituyendo en (45) a F_L y F_K y sacando λ como factor común y despejando queda:

$$w \frac{d\,L^*}{d\,w} + r \frac{d\,K^*}{d\,w} \equiv 0 \qquad (46)$$

Operando de la misma manera para el precio del otro factor se obtiene la siguiente relación:

$$w \frac{d\,L^*}{d\,r} + r \frac{d\,K^*}{d\,r} \equiv 0 \qquad (47)$$

Obtención de las funciones de costos y las demandas de factor para el caso de una función de producción Cobb-Douglas

La evidencia empírica sobre funciones de producción ha mostrado que una forma funcional que representa bastante bien la tecnología de una firma es la denominada Cobb – Douglas. Esta función de producción del bien X, para dos factores es: monótonamente creciente en términos de los factores (L y K), cóncava, no negativa, continua y F(0,0) = 0. La forma analítica de la función Cobb – Douglas se muestra a continuación:

$$X = T\, L^{a}\; K^{b} \qquad (48)$$

donde: L representa a la cantidad física del factor trabajo.

K representa a la cantidad física del factor capital.

T, a y b son parámetros que toman valores positivos (donde simplemente cambiando los valores de estas constantes se obtiene una gran variedad de técnicas de producción del bien X).

Por otro lado, la función de costos (C) viene dada por:

$$C = w\, L + r\, K \qquad (49)$$

donde: w representa la remuneración al trabajo que está dado.

r representa la remuneración al capital que está dado.

El objetivo de la firma consiste en minimizar el costo de producción de cada nivel de producción del bien X, sujeto a la técnica dada, en esta oportunidad, por la función de Cobb-Douglas descripta con anterioridad,)donde por simplicidad se hace T = 1).

El desarrollo de esta sección se amplía con el cálculo de otras relaciones útiles para el análisis microeconómico. Los puntos más destacados de los distintos desarrollos de la teoría de la producción y de los costos se encuentran señalados con una letra del alfabeto.

a.- El producto marginal de L y de K

El producto marginal de los factores y sus respectivas derivadas tienen las siguientes expresiones analíticas:

$$PMgL = dX / dL = a\,L^{a-1}\,K^{b} \quad > 0$$

$$PMgK = dX / dK = b\,L^{a}\,K^{b-1} \quad > 0 \qquad (50)$$

El producto marginal de cada uno de los factores de la producción es positivo cualquiera sea el valor de a y de b.

Las derivadas parciales segundas son iguales a:

$$d^2 X / dL^2 = a\,(a-1)\,L^{a-2}\,K^{b}$$

$$d^2 X / dK^2 = b\,(b-1)\,L^{a}\,K^{b-2} \qquad (51)$$

El signo de cada una de estas derivadas segundas pasa a depender de los valores específicos que asuman los coeficientes a y b. Aquí se tiene que considerar la clase de rendimientos a escala que presenta la función de producción.

b.- El grado de homogeneidad de la función de producción

El grado de homogeneidad de la función de producción se obtiene aumentando en un coeficiente θ (donde este coeficiente es igual a uno más la tasa de variación de las remuneraciones a los factores de la producción) el uso de ambos factores y se ve que sucede con el volumen de la producción:

$$F(\theta L, \theta K) = (\theta L)^a (\theta K)^b = \theta^{a+b} L^a K^b = \theta^{a+b} F(L, K) \qquad (52)$$

En este caso un aumento en θ en el uso de los recursos trae aparejado un incremento en la producción igual a θ^{a+b}. Si a + b es mayor que uno se está ante rendimientos crecientes a escala; si a + b es igual a uno se tienen rendimientos constantes a escala y por último si a + b es menor de uno los rendimientos son decrecientes a escala.

Teorema: Si la función de producción es homogénea de cualquier grado (a +b), las derivadas parciales son homogéneas de igual grado menos uno (a + b –1).

Luego los productos marginales del trabajo y del capital recién obtenidos son homogéneos de grado a + b –1. En esta oportunidad se tiene que:

$$\begin{aligned} H(\theta L, \theta K) &= a (\theta L)^{a-1} (\theta K)^b = a\, \theta^{a+b-1} L^{a-1} K^b \\ J(\theta L, \theta K) &= b (\theta L)^a (\theta K)^{b-1} = b\, \theta^{a+b-1} L^a K^{b-1} \end{aligned} \qquad (53)$$

Por otro lado, la homogeneidad de cualquier grado implica que las pendientes de las isocuantas a lo largo de un rayo (idéntica relación K / L) que parte del origen son iguales:

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{PMg(L)}{PMg(K)} = -\frac{a L^{a-1} K^b}{b L^a K^{b-1}} = -\frac{a}{b}\,\frac{K}{L} \qquad (54)$$

c.- Obtención de la función de costo mínimo

El tema de minimización de costos, como ya se dijo, consiste en resolver el siguiente problema de optimización restringida:

$$\underset{K,L}{\text{mínimo}} \quad w\,L + r\,K \;\; \text{sujeto a } Xo = L^a\,K^b$$

que en términos del lagrangeano queda:

$$G = w\,L + r\,K + \lambda\,(X - L^a\,K^b)$$

Diferenciando el lagrangeano (G) con respecto a L, K y λ e igualando a cero cada una de las derivadas parciales se obtiene la condición de primer orden que es igual a:

$$\begin{cases} G_L = w - \lambda\,a\,L^{a-1}\,K^{b} = 0 \\ G_K = r - \lambda\,b\,L^a\,K^{b-1} = 0 \\ G\lambda = X - L^a\,K^b = 0 \end{cases}$$

Mientras que la condición de segundo orden es igual a:

$$D = \begin{vmatrix} -\lambda a\,(a-1)L^{a-2}\,K^b & -\lambda a\,b\,L^{a-1}\,K^{b-1} & -\,a\,L^{a-1}\,K^b \\ -\lambda a\,bL^{a-1}\,K^{b-1} & -\lambda b\,(b-1)\,L^a\,K^{b-2} & -\,b\,L^a\,K^{b-} \\ -\,a\,L^{a-1}\,K^b & -\,b\,L^a\,K^{b-1} & 0 \end{vmatrix} < 0$$

Al ser el determinante de la matriz jacobiana de la condición de primer orden distinto de cero el sistema tiene una única solución que permite obtener las demandas condicionales de cada uno de los factores (las demandas de factores son condicionales ya que el nivel de producción está dado; las demandas puras surgen de resolver el problema de maximización de beneficios) y el costo marginal:

$$L(w, r, Xo)$$
$$K(w, r, Xo)$$

$$\lambda(w, r, Xo)$$

Por ultimo, si se reemplazan estas funciones en la condición de primer orden y se diferencia totalmente se obtienen los cambios en las variables (L, K y λ) cuando se producen modificaciones en los parámetros del modelo de minimización de costos (w, r, Xo).

De la condición de primer orden surge que:

$$w = \lambda\ a\ L^{a-1}\ K^{b}$$

$$r = \lambda\ b\ L^{a}\ K^{b-1}$$

De aquí se puede determinar la condición de tangencia entre el precio relativo de los factores y la tasa marginal de sustitución de capital por trabajo:

$$\frac{w}{r} = \frac{\lambda\ a\ L^{a-1}\ K^{b}}{\lambda\ b\ L^{a}\ K^{b-1}} = \frac{a\ L^{a-1}\ K^{b}}{b\ L^{a}\ K^{b-1}} = \frac{a}{b}\ \frac{K}{L}$$

Despejando según corresponda se obtiene a que es igual L o K en función de la otra variable:

$$b\ L = (r / w)\ a\ K$$

$$L = (r / w)\ (a / b)\ K$$

Para simplificar el tratamiento algebraico momentáneamente se hacen las siguientes sustituciones de parámetros: c = r / w y d = a / b. Luego:

$$L = c\ d\ K$$

Para K se tiene:

$$a\,K = (w / r)\; b\,L$$

$$K = (w / r)\; (b / a)\; L$$

$$K = (1 / c)\; (1 / d)\; L$$

A los fines de obtener la función de demanda condicional de cada uno de los factores se sustituye L y K en la función de producción para cualquier valor de X:

c.1.- La demanda condicional del factor capital

$$X = L^a\; K^b\; = (c\,d\,K)^a\; K^b$$

$$X = (c\,d)^a\; K^{a+b}$$

$$X / (c\,d)^a\; = K^{a+b}$$

$$K = X^{1/(a+b)}\; / \;(c\,d)^{a/(a+b)}$$

$$K = X^{1/(a+b)}\; (c\,d)^{-a/(a+b)}$$

Reemplazando a c y d por sus iguales queda la siguiente expresión analítica de la función demanda de capital:

$$K = X^{1/(a+b)}\; (a / b)^{-a/(a+b)}\; r^{-a/(a+b)}\; w^{a/(a+b)} \qquad (55)$$

c.2.- La demanda condicional del factor trabajo

$$X = L^a\; K^b\; = [(1 / c)\; (1 / d\,L)]^{\,b}\; L^a$$

$$X = [(1/c)\ (1/d)]^{b}\ L^{a+b}$$

$$X / [(1/c)\ (1/d)]^{b} = L^{a+b}$$

$$L = X^{1/(a+b)}\ /\ [(1/c)\ (1/d)]^{b/(a+b)}$$

$$L = X^{1/(a+b)}\ (c\ d)^{b/(a+b)}$$

Sustituyendo a c y d por sus iguales queda la siguiente expresión analítica de la función demanda de mano de obra:

$$L = X^{1/(a+b)}\ (a / b)^{b/(a+b)}\ r^{b/(a+b)}\ w^{-b/(a+b)} \qquad (56)$$

Ambas demandas de factor (L o L* y K o K*) tienen los signos esperados según la teoría de la producción y de los costos. Además, se verifica la relación de simetría (es fácil de comprobar):

$$dL^* / dr = dK^* / dw$$

c.3.- La función de costos

La función de costos se obtiene sustituyendo L y K por las respectivas expresiones de la demanda calculadas en el punto anterior, quedando de ese modo el costo total en función del precio del trabajo y del capital y de la cantidad producida:

$$C^* = w\ L^* + r\ K^*$$

$$C^* = w\ X^{1/(a+b)}\ (a / b)^{b/(a+b)}\ r^{b/(a+b)}\ w^{-b/(a+b)} +$$

$$+ r\ X^{1/(a+b)}\ (a / b)^{-a/(a+b)}\ r^{-a/(a+b)}\ w^{a/(a+b)}$$

Agrupando términos queda:

$$C^* = X^{1/(a+b)}\ r^{b/(a+b)}\ w^{a/(a+b)}\ [(a/b)^{-a/(a+b)} + (a/b)^{b/(a+b)}] \qquad (57)$$

Sea $[(a/b)^{-a/(a+b)} + (a/b)^{b/(a+b)}] = A$ (es un parámetro positivo dada la naturaleza de sus integrantes.

Luego, la función de costo total (C*) que indica el valor mínimo de producir una cantidad X, para remuneraciones a los factores predeterminadas, es igual a:

$$C^* = A\, X^{1/(a+b)}\ r^{b/(a+b)}\ w^{a/(a+b)} \qquad (58)$$

La función de costos C* es creciente en X, r y w, donde A > 0. La función de costos recién obtenida indica como varía el costo cuando se modifica el volumen de producción o alguna de las retribuciones a los factores de la producción (trabajo y capital).

El lector debería ahora intentar resolver el siguiente problema de optimización restringida: maximizar el volumen de producción para un determinado nivel de gasto.

c.4.- Si la función de producción tiene rendimientos constantes a escala la función de costo anteriormente presentada se simplifica en forma significativa, quedando la siguiente ecuación:

$$C^* = A\, X\ r^{b}\ w^{1-b}$$

c.5.- El costo medio

La función de costos medios es igual a:

$$CMe = C^* / X = A\, X^{1/(a+b)}\ r^{b/(a+b)}\ w^{a/(a+b)} / X$$

$$CMe = A\, X^{(1-a-b)/(a+b)}\ r^{b/(a+b)}\ w^{a/(a+b)} \qquad (59)$$

En el caso de rendimientos constantes a escala el costo medio viene dado por:

$$CMe = A\, r^{b}\, w^{1-b}$$

Luego, para valores dados de w y de r el costo medio es igual a una constante.

c.6.- El costo marginal

La función de costos marginales se obtiene derivando la función de costo total con respecto a X:

$$CMg = dC^* / dx$$

$$CMg = [1 / (a+b)]\, A\, X^{(1-a-b)/(a+b)}\ r^{b/(a+b)}\ w^{a/(a+b)} \qquad (60)$$

Para el caso de rendimientos constantes a escala:

$$CMg = dC / dX = A\, r^{b}\, w^{1-b}$$

Luego, para valores dados de w y de r el costo marginal es igual a una constante e igual al costo medio. Además:

$$dCMg / dw > 0$$

$$dCMg / dr > 0$$

c.7.- Relación entre el costo medio y el costo medio

El costo marginal calculado en c.6.- puede descomponerse en dos partes [1 / (a + b)] y $A\ X^{(1 - a - b) / (a+b)}\ r^{b / (a+b)}\ w^{a / (a+b)}$, donde este último componente es igual a costo medio (obtenido en c.5.-). Luego:

$$CMg = \frac{1}{(a + b)} CMe \qquad (61)$$

Entonces, la posición del costo marginal y del costo medio en el diagrama costos unitarios nivel de producción pasa a depender de grado de homogeneidad de la función de producción:

* Si a + b > 1 el CMg < CMe

* Si a + b = 1 el CMg = CMe

* Si a + b < 1 el CMg > CMe

c.8.- El lema de Shephard

Si se deriva la función de costos C* con respecto a la remuneración al trabajo se obtiene la función demanda de trabajo:

$$\frac{dC^*}{dw} = L^*$$

Si se deriva la función de costos C* con respecto a la remuneración al capital se obtiene la función demanda de capital.

$$\frac{dC^*}{dr} = K^*$$

c.9.- La función de costos de corto plazo

El desarrollo realizado en los puntos previos supuso que ambos factores de la producción eran variables. Sin embargo en el corto plazo uno de los dos factores puede ser fijo. Suponga en esta oportunidad que el capital está determinado y que es igual a K_0. Luego, la función de producción queda expresada en los siguientes términos:

$$X = L^a \; K_0^b$$

Haciendo al coeficiente $K_0^b = k$, la expresión anterior es igual a:

$$X = k \, L^a$$

Los pasos a seguir a fin de obtener la función de costos de corto plazo son muy sencillos. Para ello en la expresión previa se despeja L quedando los siguientes términos:

$$L = k^{-1/a} \, X^{1/a}$$

a su vez se sustituye en la función de costos a L y a K por sus respectivos iguales:

$$C_{cp} = r \, K_0 + w \, k^{-1/a} \, X^{1/a} \qquad (62)$$

El costo de corto plazo (C_{cp}) tiene dos componentes: el costo fijo (primer componente del segundo miembro) y el costo variable (segundo componente del segundo miembro).

En esta oportunidad tanto el costo marginal como el costo variable medio son funciones crecientes en términos del volumen de producción y además el costo marginal se encuentra por encima del costo variable medio.

La función de costos y las demandas de factor para el caso de la función de producción de Leontief

Suponga que la función de producción es del tipo de Leontief (los factores de la producción son complementos perfectos). La expresión analítica de este tipo de función de producción viene dada por:

$$X = \text{mínimo } [a\ L,\ b\ K]$$

Si se desea producir X_0 unidades del bien X hay que utilizar L_0 y K_0 unidades de trabajo y capital respectivamente, donde se tienen que verificar las siguientes igualdades:

$$X_0 = a\ L_0 = b\ K_0$$

En virtud de esto se tiene que en general para cualquier nivel de producción posible (X):

a.- La demanda de trabajo es igual a: $L = X / a$.

b.- La demanda de capital es igual a: $K = X / b$

Sustituyendo estas dos relaciones en la función de costos:

$$C = w\ L + r\ K$$

se obtiene:

$$C^*(w,r,X) = w\,(X / a) + r\,(X / b) = (w / a + r / b)\,X \qquad (63)$$

Por último, cabe señalar que el costo medio y el costo marginal son constantes.

Conclusiones

El trabajo trata algunas de las características más destacadas relativas a los costos de producción de una firma. Se obtiene la función de costos y se establecen sus propiedades más importantes además se calculan las funciones de costo marginal y costo medio. También se derivan las demandas de factores de la producción y se señalan sus principales características. Esto permite ver como cambia la solución del problema de optimización restringida cuando se produce una pequeña modificación en la información que proviene del mercado y que afecta a los parámetros.

Asimismo se hace referencia a las características más destacadas de las funciones de costos Cobb – Douglas y de Leontief, dejando de lado otras aproximaciones también muy importantes dentro de la literatura (Delfino 2003). No se consideró el tema de la dualidad que es un aspecto de mucha relevancia dentro del análisis económico el cual será objeto de un nuevo artículo. Sin embargo, con relación a este último aspecto en el trabajo están prácticamente todos los elementos para el tratamiento de la dualidad. Como se sabe el cumplimiento de las propiedades de la función de costos implican la existencia del conjunto de posibilidades de producción, lo cual implica la existencia de la función de producción.

Bibliografía

Arrow, K. and Hann, F. "General Competitive Analysis". Holden-Day. 1971.

Arrow, K. and Intriligator, M. "Handbook of Mathematical Economics". 1980

Chiang, A. "Métodos Fundamentales de Economía Matemática". McGraw-Hill. 1990.

Debreu, G. "Theory of Value". 1959. Versión en castellano: "Teoría del Valor" Antoni Bosch, editor, 1973.

Delfino, A.: “Formas Funcionales Flexibles: La Función de Producción Translogarítmica y la de Costos de Leontief “.Documentos de Trabajo N° 17, Departamento de Economía, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Córdoba. Octubre de 2003.

Diewert, W.E.: “An Application of the Shephard Duality Theorem: A Generalized Leontief Production Function”. Journal of Political Economy, 79. !971.

Dixit, A.K.: “Optimization in Economic Theory”. Second Edition. Oxford University Press. 1990.

Henderson, J y Quandt, R. "Microeconomic Theory: A Mathematical Approach". McGraw-Hill. 1980.

Hirshleifer, J. y Glazer, A. "Microeconomía, Teoría y Aplicaciones". Prentice Hall Inc. 1992.

Intrigilator, M. "Mathematical Optimization and Economic Theory". Englewood Cliffs: Prentice-Hall Inc. 1971.

Jehle, Geoffrey and Philip Reny: “Advanced Microeconomic Theory”. Second Edition. Addison Wesley. 2001.

Kreps, D. "A course in Microeconomic Theory". University Press, Princeton. 1990.

Layard, P. and Walters, A. "Microeconomics Theory". 1978.

Mas-Collel, A., M. D. Whinston and J. R. Green. Microeconomic Theory. Oxford University Press. 1995.

Miller, R. y Meiners, R. "Microeconomía". McGraw-Hill. Tercera Edición. 1995.

Samuelson, Paul: “Foundations of Economic Analysis”. Harvard University Press, Cambridge. 1948.

Shephard, Ronald: “Theory of cost and Production Functions”. Princeton University Press. 1970.

Silberberg, Eugene: "The Structure of the Economics". McGraw Hill. 1990.

Shephard, Ronald: “Cost and Production Functions”. Princeton University Press, Princeton, N.J. 1953.

Swoboda, C. “Análisis de Estática Comparativa de la Función de Beneficio de una Firma”. Documentos de Trabajo N° 2, Departamento de Economía, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Córdoba. Agosto de 2000.

Varian, H. "Análisis Microeconómico". Antoni Bosch editor. 1992.

Zellner, A.: “An Interesting General Form for a Production Function”. Econometrica, 19. 1951.

Zellner, A., J. Kmenta and J Dreze: “Specification and Estimation of Cobb – Douglas Production Function Models”. Econometrica, 34. October 1966.

Apéndice

La elasticidad en la teoría de la producción y de los costos

Introducción

La elasticidad es un indicador de amplio uso en el análisis económico debido a que su conocimiento le provee a los operadores un valioso instrumento de trabajo. La elasticidad, en general, indica el cambio porcentual que se produce en una determinada variable cuando otra, que guarda alguna relación con la primera, se modifica en un determinado porcentaje. Las elasticidades más conocidas, dada la frecuencia de su uso, son las elasticidades precio e ingreso de la demanda y la elasticidad precio de la oferta, sin embargo con ellas no se agota la vasta gama de alternativas que existen. En este apéndice se hace referencia a los indicadores más comúnmente empleados en la teoría de la producción y de los costos con algunas aplicaciones concretas a determinadas funciones.

Elasticidades de uso más frecuentes

La elasticidad de un factor de la producción

La elasticidad de un factor se define como el cociente entre el cambio porcentual en la producción y el cambio porcentual en el uso del trabajo o del capital. En términos algebraicos si, por ejemplo, se toma como referencia el factor trabajo, manteniendo constante el uso de los otros insumos, la elasticidad de un factor de la producción queda definida de la siguiente manera:

$$\delta = \frac{d\,F(K,L) \,/\, F(K,L)}{d\,L \,/\, L}$$

Si en ésta expresión se efectúan algunos arreglos en los componentes que integran el segundo miembro, la elasticidad del factor puede expresarse como el cociente entre el producto marginal del trabajo y el producto medio del trabajo. Para ello se tiene que:

$$\delta = \frac{d\,F(K,L)}{d\,L} \; \frac{L}{F(K,L)} = \frac{PMg(L)}{PMe(L)}$$

En el caso de una función de producción Cobb-Douglas $X = L^a K^b$ se tiene que el producto marginal de L es igual a: $PMg(L) = a\,L^{a-1} K^b$, mientras que el producto medio de L es igual a $PMe(L) = L^{a-1} K^b$, luego la elasticidad del factor trabajo es igual a:

$$\delta = \frac{a\,L^{a-1} K^b}{L^{a-1} K^b} = a$$

En el caso particular de la función de producción Cobb Douglas el parámetro que aparece como potencia del factor trabajo es la elasticidad del trabajo. El valor que asume la elasticidad del factor trabajo da la pauta del comportamiento del producto marginal de este insumo. Para ver esto se toma la función de producto marginal y se deriva con respecto a L. Dicha derivada parcial es igual a:

$$\frac{d\ PMg(L)}{d\ L} = a\ (a - 1)\ L^{a-2}\ K^{b}$$

En virtud de que la expresión $L^{a-2} K^{b}$ es siempre mayor que cero, el signo de la derivada parcial pasa a depender del valor que asuma el coeficiente a. Si el parámetro $a > 1$ la d PMg(L) / d L es positiva y por tanto el producto marginal del trabajo es creciente. Si $a = 1$ la d PMg(L) / d L es igual a cero y por tanto el producto marginal del trabajo es constante. Si $a < 1$ la d PMg(L) / d L es negativa y por tanto el producto marginal del trabajo es decreciente, tal como sucede en la gran mayoría de los procesos productivos.

Un análisis similar puede efectuarse en términos del factor capital, en cuyo caso b es la elasticidad del factor capital.

La elasticidad de sustitución

La elasticidad de sustitución brinda información acerca de como cambia la relación entre el capital y el trabajo cuando se modifica la tasa marginal de sustitución entre los factores, manteniendo constante la cantidad producida. En virtud de que en el óptimo la pendiente de la isocuanta es igual al precio relativo de los factores en lugar de tomar el cambio en la tasa marginal de sustitución es posible considerar la modificación que se da en el precio relativo de los factores.

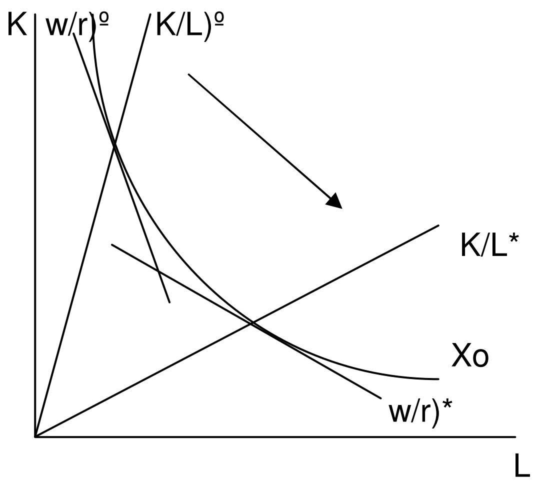
De esta manera la elasticidad sustitución queda definida como el cociente entre el cambio en la relación capital - trabajo y el cambio en la relación de los precios de los factores de la producción. Se tiene así la siguiente expresión analítica:

$$\rho = \frac{\dfrac{d\,(K / L)}{K / L}}{\dfrac{d\,(w / r)}{w / r}} = \frac{d\,(K / L)}{d\,(w / r)} \; \frac{(w / r)}{(K / L)}$$

En la Figura 1 se presentan los principales componentes de la definición de la elasticidad de sustitución. Ahí se observa que sucede cuando cambia el precio relativo [d(w / r)], si por ejemplo disminuye el salario (se pasa de la relación w/r)º a la relación w/r)*) se modifica la relación capital trabajo (K / L) (se pasa de K/L)º a K/L)*). Una caída del salario manteniendo el precio del capital hace que el proceso productivo del bien X sea más intensivo en el uso de la mano de obra.

Figura 1

La pendiente de la isocuanta y el precio relativo de los factores



El cálculo de la elasticidad de sustitución para la función de producción Cobb-Douglas ayuda para comprender mejor el concepto. Para ello se parte de la función tradicional: $X = L^a K^b$ y se opera por partes de la siguiente manera:

La tasa marginal de sustitución del capital (K) por el trabajo (L) es igual a la siguiente expresión:

$$TMgS_{K:L} = \frac{PMg(L)}{PMg(K)} = \frac{a}{b}\,\frac{(X / L)}{(X / K)} = \frac{a}{b}\,\frac{K}{L}$$

Además, en el óptimo se verifica que la tasa marginal de sustitución de capital por trabajo es igual al precio relativo del trabajo en términos del capital. Luego:

$$\frac{a}{b}\,\frac{K}{L} = \frac{w}{r}$$

Operando algebraicamente se tiene que:

$$\frac{K}{L} = \frac{b}{a}\,\frac{w}{r}$$

Si ahora se deriva la relación capital trabajo (K / L) con respecto al precio relativo de los factores (w / r) queda:

$$\frac{d\,(K / L)}{d\,(w / r)} = \frac{b}{a}$$

Además se tiene que el gasto total en el factor capital sobre el gasto total en el factor trabajo es igual al cociente entre el coeficiente que tiene el capital en la función de producción y el coeficiente correspondiente al trabajo:

$$\frac{r}{w}\,\frac{K}{L} = \frac{b}{a}$$

Sustituyendo cada uno de los términos de la definición de ρ por los recientemente calculados se tiene que:

$$\rho = \frac{a}{b}\,\frac{b}{a} = 1$$

De esta forma, cuando la función de producción es del tipo Cobb - Douglas si el precio relativo del trabajo (w / r) sube un 1% la relación capital - trabajo (K / L) también lo hace en el 1%.

La elasticidad de escala

La elasticidad de escala se define como el cociente entre el cambio porcentual en el nivel de producción y la variación porcentual en el uso de los factores. En términos algebraicos se tiene la siguiente expresión:

$$\phi = \frac{d\,X(\lambda) / X(\lambda)}{d\,\lambda / \lambda}$$

Si se evalúa para un valor de $\lambda = 1$ se obtiene el factor de escala en el punto que se está tomando como referencia. Según sea el valor que tome el coeficiente, mayor que uno, igual a uno o menor que uno se estará frente a rendimientos crecientes, constantes o decrecientes a escala respectivamente.

En el caso de la función de producción Cobb-Douglas se tiene:

$$X(\lambda) = F(\lambda K, \lambda L) = (\lambda L)^a (\lambda K)^b = \lambda^{a+b} L^a k^b = \lambda^{a+b} F(K,L)$$

Derivando la expresión anterior con respecto a λ se obtiene una parte de la definición de la elasticidad de escala (ϕ):

$$\frac{d\, X(\lambda)}{d\, L} = (a + b)\, \lambda^{a+b-1} L^a K^b$$

Haciendo $\lambda = 1$ queda:

$$\frac{d\, X(\lambda)}{d\, \lambda} = (a + b)\, l^a k^b$$

Realizando las respectivas sustituciones en la definición de la elasticidad de escala se tiene:

$$\phi = \frac{d\, X(\lambda)}{d\, \lambda} \frac{\lambda}{X(\lambda)} = (a + b)\, L^a K^b \frac{1}{L^a K^b} = a + b$$

De ésta manera: si $a + b < 1$ se está frente a rendimientos decrecientes a escala; si $a + b = 1$ se tienen rendimientos constantes a escala y por último si $a + b > 1$ se está frente a rendimientos crecientes a escala Observando el resultado que se obtuvo al calcular la elasticidad de escala surge que la misma es igual a la suma de las elasticidades de cada uno de los factores que integran la función de producción. Luego, para el caso de varios factores de la producción se tiene que:

$$\phi = \Sigma\, \delta i \text{ siendo } i = k, L, \text{ etcétera}$$

A un resultado equivalente al anterior se llega a través de otro camino. Para ello se diferencia de manera total la función de producción. Se tiene así que:

$$d X = F_K \, d K + F_L \, d L$$

Dividiendo miembro a miembro por X y además en el segundo miembro a cada uno de los sumando se los multiplica y divide por las cantidades físicas de cada uno de los factores queda:

$$\frac{d X}{X} = F_L \frac{1}{X} \frac{L}{L} d L + F_K \frac{1}{X} \frac{K}{K} d K$$

Si el incremento en los dos factores de la producción es el mismo, es decir d L / L = d K / K y tomando sólo el correspondiente al trabajo se tiene que:

$$\frac{d X}{X} = \left(F_L \frac{L}{X} + F_K \frac{K}{X} \right) \frac{d L}{L}$$

Pasando d L / L al primer miembro queda definida la elasticidad de escala como la suma de las elasticidades de los factores:

$$\phi = \frac{d X / X}{d L / L} = \frac{d X}{d L} \frac{L}{X} = \delta_L + \delta_K$$

Relación de la elasticidad con los costos de producción

Aquí se intenta relacionar la escala de producción con los costos unitarios a partir del concepto de elasticidad de escala. Para ello se parte de la definición de la ya mencionada elasticidad:

$$\phi = \left(F_L \frac{L}{X} + F_K \frac{K}{X} \right)$$

Multiplicando y dividiendo cada uno de los componente del segundo miembro por las respectivas remuneraciones a los factores de la producción se tiene:

$$\phi = \left(\frac{w\,L\,F_L}{X\,w} + \frac{r\,K\,F_K}{X\,r} \right)$$

Por otro lado, en el óptimo se verifica que el producto marginal del último peso gastado en el factor trabajo debe ser igual al producto marginal del último peso gastado en el factor capital: $F_L / w = F_K / r$.

Esta igualdad permite sacar en la última expresión al cociente entre el producto marginal del trabajo y su retribución (F_L / w) como factor común (también podría haber sido el otro componente F_K / r):

$$\phi = \left(\frac{w\,L}{X} + \frac{r\,K}{X} \right) \frac{F_L}{w} = \frac{(w\,L + r\,k)}{X} \; \frac{F_L}{w}$$

En esta expresión aparecen dos elementos que corresponden a conceptos ya conocidos con antelación: a) en el numerador se tiene el costo total que es igual a: CT(X) = w L + r K, el cual dividido por la cantidad producida (X) que aparece en el denominador da como resultado el costo medio de producción: CMe(X) = CT (X) / X y b) el cociente entre F_L y w que es la inversa del costo marginal (producto marginal de L y salario); de forma tal que: CMg(X) = w / PMg(L).

Luego, la elasticidad de escala también puede expresarse como el cociente entre el costo medio de producción y el costo marginal:

$$\phi = \frac{CMe(X)}{CMg(X)}$$

La elasticidad del costo total

La elasticidad del costo total se define como el cociente entre la variación porcentual entre el costo total y el nivel de producción:

$$ec = \frac{d\,C(x) / C(x)}{d\,X / X}$$

Ordenando los componentes de la definición y sustituyendo por sus equivalentes se tiene que:

$$ec = \frac{d\,C(X)}{d\,X}\,\frac{X}{C(X)} = \frac{CMg(X)}{CMe(X)} = \frac{1}{\phi}$$

Luego, la variación porcentual del costo total ante un determinado cambio porcentual en la producción es igual a la inversa de la elasticidad escala. Además si el CMg(X) > CMe(X), ec > 1 de forma tal que el costo total crece en una proporción mayor que la producción (cuando ec < 1el costo total crece en un porcentaje menor que la producción y cuando ec = 1 ambos se modifican en el mismo ritmo).